**A 54-a Olimpiadă Naţională de Matematică**
**Sibiu, 23 aprilie 2003**

**Primul test de selecţie pentru OBM – Juniori 2003**

SOLUŢII

## Subiectul 1

Triunghiul $RSN \equiv QSM$ (L.L.L.) $\Rightarrow$ $R, P, S, Q$ conciclice şi $P, S, N, M$ conciclice $\Rightarrow$ $P, S, Q, D, R$ conciclice pe cercul $C(O_1)$ cu centrul în mijlocul segmentului $[PD]$.
Analog $P, S, N, B, M$ conciclice pe cercul $C(O_2)$ cu centrul in mijlocul segmentului $[PB]$.
Cum [PS] este coardă comună pentru cercurile $C(O_1)$ şi $C(O_1)$ rezultă $O_1O_2 \perp PS$.
Dar $O_1O_2 || BD \Rightarrow PS \perp BD \Rightarrow PS || AC$. Analog $PT || BD$. In concluzie $PS \perp PT$.
Deoarece $O_1O_2$ este linie mijlocie în triunghiul $PBD$ rezultă că $S \in (BD)$.
Analog se arată că $T \in (AC)$. Rezultă că $P, O, S, T$ sunt vârfurile unui dreptunghi.

## Subiectul 2

Fie $A = \{n_1, n_2, \ldots, n_{31}\}$ şi $S = n_1^4 + n_2^4 + \cdots + n_{31}^4$.
$2 \in A$, altfel $n_i$ e impar şi $S$ e impar, contradicţie.
$3 \in A$, altfel $n_i = \mathcal{M}_3 \pm 1$ si $n_i^4 = \mathcal{M}_3 + 1$, $i = \overline{1, 31}$.
Atunci, $S = \mathcal{M}_3 + 31 = \mathcal{M}_3 + 1$, fals.
$5 \in A$ altfel $n_i = \mathcal{M}_5 \pm 2$ sau $n_i = \mathcal{M}_5 \pm 1$, de unde $n_i^2 = \mathcal{M}_5 \pm 1$ şi $n_i^4 = \mathcal{M}_5 + 1$.
Atunci $S = \mathcal{M}_5 + 31 = \mathcal{M}_5 + 1$, fals.
In concluzie $2, 3, 5 \in A$.

## Subiectul 3

Avem $2n + 1 + 2\sqrt{n^2 + n} < x + y + 2\sqrt{xy} < 4n + 2. \quad (1)$
Din $4n+1 < x+y+2\sqrt{xy} \leq 2(x+y)$ rezultă $x+y \geq 2n+1$. Notăm $a = x+y-(2n+1) \in \mathbf{N}$ şi observăm că $a \leq 2n$. Avem $a + 2\sqrt{xy} < 2n + 1$, de unde $4xy < (2n + 1 - a)^2$, deci $4xy \leq (2n + 1 - a)^2 - 1$ şi $2\sqrt{xy} < \sqrt{(2n + 1 - a)^2 - 1}$.
Din (1) obţinem $2\sqrt{n^2 + n} < a + 2\sqrt{xy} < a + \sqrt{(2n + 1 - a)^2 - 1} \Rightarrow \sqrt{4n^2 + 4n} - a < \sqrt{(2n + 1 - a)^2 - 1} \Rightarrow 4n^2 + 4n + a^2 - 2a\sqrt{4n^2 + 4n} < (2n + 1 - a)^2 - 1 \Rightarrow (2n + 1)^2 - (2n + 1 - a)^2 + a^2 < 2a\sqrt{4n^2 + 4n} \Rightarrow 2a(2n + 1) < 2a\sqrt{4n^2 + 4n}$, fals.

## Subiectul 4

Fixăm un punct $A$ şi considerăm partiţia planului în cercuri cu centrul în $A$.
Punctele cercurilor de rază $r \in Q$ se colorează cu roşu, iar celelalte cu albastru.
Fie $MN$ un segment. Considerăm cercurile de raze $OA \neq OB$, unde $A, B \in (MN)$.
Intre $OA$ şi $OB$ există şi numere raţionale şi iraţionale, de exemplu $q \in Q$ şi $i \notin Q$.
Cercurile de raze $q$ şi $i$ taie segmentul $MN$ în puncte de culori diferite.